Mecânica Geral - 2011.2 - IF-UFF - Lista de exercícios n. 5

Ernesto Galvão
(Dated: September 19, 2011)

I. PROBLEMAS DA LISTA

1. Fio infinito de massa. Um fio infinito de densidade linear de massa μ se encontra no eixo z. a) Calcule a força gravitacional $\vec{F}$ sobre uma massa pontual m a uma distância ρ do eixo z. b) Verifique que $\nabla \times \vec{F} = 0$. (Dica: use o rotacional em coordenadas cilíndricas.) d) Ache a energia potencial gravitacional U correspondente.

2. Oscilador harmônico. Considere uma massa pontual m na ponta de uma mola de constante elástica k. A massa está livre para oscilar no eixo horizontal x, e o ponto de repouso do sistema mola-massa está na origem (logo, a energia potencial elástica é $U = \frac{1}{2}kx^2$). No instante $t = 0$ damos uma pancada na massa, fazendo com que ela se desloque para a direita até o ponto $x = A$, onde ela para e começa a retornar, oscilando em torno da origem.
a) Escreva a equação de conservação de energia e a resolva para obter a velocidade $\dot{x}$ da massa em termos da posição x e da energia mecânica total E.
b) Mostre que $E = \frac{1}{2}kA^2$ e use isso para eliminar E da expressão para $\dot{x}$ no item a). Use $t = \int dx'/\dot{x}(x')$ para achar o tempo que a massa leva para ir da origem até um ponto x.
c) Use o resultado de b) acima para encontrar $x(t)$.

3. Pêndulo e energia. Vamos discutir o problema do pêndulo simples usando energia. O pêndulo é formado por uma partícula de massa m presa na ponta de uma vareta de comprimento L e massa desprezível. A outra ponta da vareta está presa ao teto por uma articulação que permite que ela se mova livremente num plano vertical. A posição do pêndulo pode ser dada pelo ângulo ϕ feito pela vareta em relação à posição vertical de equilíbrio (veja a figura 1).

a) Prove que a energia potencial (gravitacional) do pêndulo é dada por

$$U(\phi) = mgL(1 - cos\phi), \tag{1}$$

onde o zero de potencial é a altura da massa no equilíbrio.
b) Escreva a expressão para a energia total E como função de ϕ e $\dot{\phi}$. Derive essa expressão em relação ao tempo, e mostre que você obtém a equação do movimento, que também pode ser obtida a partir de $\vec{\Gamma} = I\vec{\alpha}$ (onde Γ é o torque, I é o momento de inércia e α é a aceleração angular $\ddot{\phi}$).
c) Assuma que o ângulo ϕ permanece pequeno durante todo o movimento. Nessa aproximação, encontre $\phi(t)$ e mostre que o movimento é periódico com período $\tau_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$.

4. Equilíbrio. Uma bola de metal de massa m está transpassada por uma haste rígida metálica vertical, e pode correr para cima e para baixo nessa haste. Uma corda de massa desprezível e comprimento L está presa à bola, passando por uma polia e presa a uma massa M. As posições do sistema bola/massa

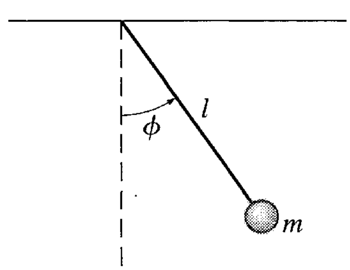

FIG. 1: Pêndulo simples

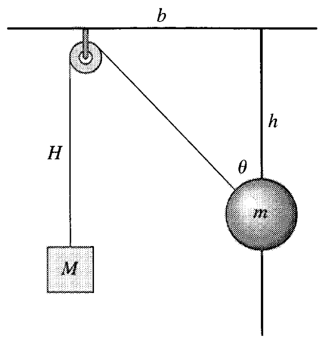

FIG. 2: Equilíbrio.

podem ser descritas pelo ângulo θ, veja a figura 2.

a) Escreva uma expressão para a energia potencial gravitacional $U(\theta)$. Escreva $U(\theta)$ como função de θ, b e L somente, assumindo que a bola e a massa têm tamanho desprezível.
b) Derive $U(\theta)$ para encontrar a posição de equilíbrio do sistema. Discuta a estabilidade do equilíbrio.

5. Colisão inelástica. Uma partícula de massa m_1 e velocidade v_1 colide com uma segunda partícula de massa m_2 e inicialmente em repouso. A colisão é perfeitamente inelástica, ou seja, as duas partículas se grudam depois da colisão, andando juntas com uma mesma velocidade v. Que fração da energia cinética inicial é perdida na colisão? Analise os casos-limite $m_1 \ll m_2$ e $m_2 \ll m_1$.

II. OUTROS PROBLEMAS RECOMENDADOS

Taylor 4.12, 4.20, 4.30, 4.35, 4.47, 4.49, 4.53.